МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий, математики и экономики

Методические указания к самостоятельной работе и выполнению расчетно-графических работ (часть 1)

Дисциплина Б1.О.05.04 Вычислительная математика и численные методы
код и наименование дисциплины

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
код и наименование направления подготовки /специальности

Направленность (профиль) Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем
наименование направленности (профиля) /специализации образовательной программы

Квалификация выпускника бакалавр
указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ФГОС ВО

Мурманск
2021

Составитель – Авдеева Елена Николаевна, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики Мурманского государственного технического университета

Методические указания к самостоятельной работе и выполнению РГР рассмотрены и одобрены на заседании кафедры-разработчика: ЦТМиЭ

21.06.2021, протокол № 12.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика и численные методы» студенты должны:

• знать основные правила вычисления приближенных значений величин;

• уметь оценивать погрешность полученного результата;

• знать основные методы решения нелинейных уравнений;

• уметь решать системы линейных алгебраических уравнений;

• знать основы интерполирования функций, заданных таблично;

•

Данные методические рекомендации включают справочный материал, необходимый для выполнения расчетно-графической работы (РГР) № 1 и решение примерного варианта работы, в котором имеются ссылки на используемый справочный материал.

Перед выполнением РГР необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии со ссылками на литературу, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта РГР.

ЗАДАНИЯ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ № 1.

РГР № 1 состоит из четырех задач. Задание для каждой задачи включает в себя ее формулировку и десять вариантов исходных данных.

Задача 1. Даны приближенные значения величин x и y и известно, что абсолютная погрешность $\Delta(x) = N/50$, а относительная погрешность $\delta(y) = N\%$ (здесь и далее N – номер варианта). Требуется:

1) вычислить значение величины $s = \dfrac{(N+1)\cdot x - y}{x + N\cdot y}$, оценить предельную абсолютную погрешность $\Delta(s)$ и округлить значение s в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции $f(x, y) = \ln(x + N)\cdot(N + y^2)$, оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Номер варианта	Значения величин x и y	Номер варианта	Значения величин x и y
1	$x = 3{,}5$; $y = 0{,}48$	2	$x = 4{,}1$; $y = 0{,}29$
3	$x = 2{,}6$; $y = 0{,}54$	4	$x = 1{,}4$; $y = 0{,}75$
5	$x = 1{,}7$; $y = 0{,}42$	6	$x = 6{,}5$; $y = 0{,}22$
7	$x = 5{,}2$; $y = 0{,}35$	8	$x = 3{,}8$; $y = 0{,}72$
9	$x = 2{,}3$; $y = 0{,}62$	10	$x = 5{,}9$; $y = 0{,}36$

Задача 2. Дано уравнение $N{\cdot}x^3 + x - N/3 = 0$ (N – номер варианта). Требуется:

1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;

2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ при помощи метода деления отрезка пополам.

Указание. Все промежуточные вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой.

Задача 3. Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 25 \\ 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 45 \\ 4x_4 + 5x_5 = 41 \end{cases}.$$

Задача 4. Дана таблица значений функции $f(x)$:

x_i	$N - 0{,}7$	$N - 0{,}3$	$N + 0{,}1$	$N + 0{,}5$	$N + 0{,}9$
$f(x_i)$	$N/3$	$N/6$	$N/7$	$N/5$	$N/2$

(N – номер варианта).

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции $f(x)$ интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x} = N + 0{,}3$.

Указание Все вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой. Округлить полученное значение $f(\bar{x})$ до 3-х десятичных знаков после запятой

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

№ задачи	Содержание (темы)	Литература
1	Погрешности вычислений. Предельная абсолютная погрешность и предельная относительная погрешности вычислений. Вычисление приближенных значений функции	[1], гл. 1, §1; [2], гл. 1.1; [4], гл. I, работа №1(1), 2(2); [5], §1, 2.1, 2.2.1
2	Методы решения нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам	[1], гл. 4, §26; [2], гл.5.1, 5.2; [3], гл.IX, № 1168, 1169, 1170, 1178, 1179; [4], гл. IV, работа №1(15); [5], §2
3	Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Вычисление определителя с использованием метода Гаусса	[1], гл.3, §19; [2], гл. 2.1, 2.2; [4], гл. III, работа №2(7), 3(8); [5], §4.1.1, 6.1,
4	Полиномиальная интерполяция функций. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и его использование	[1], гл. 1, §4, 5; [2], гл. 8.1, 8.2; [3], гл.IX, № 1192-1196; [4], гл. VI, работа №1(32)

Примечание. Ссылки на литературу в таблице даны в соответствии с номерами в списке рекомендуемой литературы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Погрешности вычислений

1.1. *Абсолютная и относительная погрешности*

Практические вычисления проводятся над числами, которые могут быть заданы не только точно, но и приближенно. Например, число 1/3 можно записать в виде десятичной дроби только приближенно.

Правило округления чисел: если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то все сохраняемые цифры не изменяются, а если первая отбрасываемая цифра больше или равна пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры. $13523 \approx 13500 = 135 \cdot 10^2$, $2{,}1564 \approx 2{,}16$, $-0{,}325 \approx -0{,}33$.

Обозначим a^* – точное значение некоторой величины, a – приближенное значение этой величины (приближенное число).

Величину $|a - a^*|$ называют *абсолютной погрешностью числа* a.

В большинстве случаев a^* неизвестно, однако, можно указать некоторое число $\Delta(a)$, оценивающее абсолютную погрешность приближенного числа, т.е. удовлетворяющее условию $|a - a^*| \le \Delta(a)$. Число $\Delta(a)$ называют *предельной абсолютной погрешностью* числа a. Обычно предельную абсолютную погрешность называют просто абсолютной погрешностью и записывают так: $a^* = a \pm \Delta(a)$, причем в числах a и $\Delta(a)$ сохраняют одинаковое число знаков после запятой. При округлении предельной абсолютной погрешности его значение всегда берется «с избытком», т.е. последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры. $\pi^* = 3{,}1416 \pm 0{,}0001$; $\frac{2}{3} = 0{,}67 \pm 0{,}01$.

Предельной относительной погрешностью числа a называют величину $\delta(a) = \dfrac{\Delta(a)}{|a^*|}$ или $\delta(a) = \dfrac{\Delta(a)}{|a^*|} \cdot 100\%$. В случае, когда a^* неизвестно, полагают, что $\delta(a) = \dfrac{\Delta(a)}{|a|}$ или $\delta(a) = \dfrac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\%$. Обычно предельную относительную погрешность числа называют просто *относительной погрешностью*.

<u>Примеры.</u> $\pi^* = 3{,}1416 \pm 0{,}0001 \Rightarrow \delta(\pi) = \dfrac{\Delta(\pi)}{|\pi|} \approx \dfrac{0{,}0001}{3{,}1416} \approx 0{,}00003;$

$$\frac{2}{3} = a^* = 0{,}67 \pm 0{,}01 \Rightarrow \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{\left|\frac{2}{3}\right|} \cdot 100\% \approx \frac{0{,}01}{0{,}67} \cdot 100\% \approx 1{,}5\%.$$

Первая слева цифра числа, отличная от нуля, и все цифры, расположенные правее нее, называются *значащими цифрами числа*. В записи погрешностей обычно оставляют одну значащую цифру, например, $\Delta(a) = 4 \cdot 10^5$, $\Delta(b) = 0{,}05$, или $\delta(x) = 3\%$.

Если приближенное число записано без указания его погрешности, то по умолчанию считается, что его абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего сохраненного разряда в записи числа, например, запись $a \approx 2{,}320$ означает, что $\Delta(a) = 0{,}001$.

1.2. *Вычисления с учетом погрешностей*

При выполнении действий над приближенными числами происходит накопление погрешностей, и полученный результат не может быть точнее исходных данных.

Основные формулы для вычисления погрешностей арифметических операций:

$$\Delta(c^* \cdot a) = c^* \cdot \Delta(a), \text{ если } c^* \text{ – точное число (константа);}$$

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b); \tag{1}$$

$$\Delta(ab) = |a| \cdot \Delta(b) + |b| \cdot \Delta(a);$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|a| \cdot \Delta(b) + |b| \cdot \Delta(a)}{b^2}; \tag{2}$$

$$\delta(a \pm b) = \frac{|a| \cdot \delta(b) + |b| \cdot \delta(a)}{|a \pm b|};$$

$$\delta(ab) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b). \quad (3)$$

При выполнении арифметических операций обычно все промежуточные вычисления осуществляют с одной или двумя запасными десятичными цифрами по сравнению с желаемым результатом, а затем полученный результат округляют: либо до требуемой в задаче точности, либо в соответствии абсолютной погрешностью результата (например, если a = 12305362, $\Delta(a)$ = = $2\cdot10^5$, то $a \approx 123\cdot10^5$; если b = 1,2345, $\Delta(b)$ = 0,05, то $b \approx 1,23$).

<u>Примеры.</u>

1. Найти разность чисел: a^* = 1,24 ± 0,03 и b^* = 7,361 ± 0,007.

<u>Решение</u>. Погрешность: $\Delta(a - b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ = 0,037 ≈ 0,04 (формула (1)).

Результат вычитания: $a - b$ = (1,24 – 7,361) ± 0,04 ≈ – 6,12 ± 0,04.

2. Найти отношение чисел: x = 0,255 и y = 34,01, если известна погрешность $\delta(x)$ = 1%.

<u>Решение</u>. Приближенное число y записано без указания его погрешности, следовательно, $\Delta(y)$ = 0,01, откуда находим: $\delta(y) = \dfrac{\Delta(y)}{|y|} = \dfrac{0,01}{34,01} \approx 0,0003$.

$$z = \frac{x}{y} = \frac{0,255}{34,01} \approx 0,007498,$$

$$\delta(z) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \{\text{формула (3)}\} = \delta(x) + \delta(y) = 0,01 + 0,0003 = 0,0103 \approx 0,01,$$

$$\Delta(z) = z \cdot \delta(z) \approx 0,007498 \cdot 0,01 \approx 0,00008.$$

Результат деления: $z = \dfrac{x}{y} = 0,00750 \pm 0,00008$.

Если значение аргумента функции $y = f(x)$ – приближенное число x, то *абсолютную погрешность значения функции* оценивают по следующей формуле:

$\Delta(y) \le \max\limits_{x} |f'(x)| \cdot \Delta(x)$, где максимум модуля производной вычисляется как его наибольшее значение на промежутке $x \in [x - \Delta(x); x + \Delta(x)]$.

Абсолютную погрешность значения функции 2-*х аргументов* $z = f(x, y)$

можно оценить по формуле:

$$\Delta(z) \le \max_D \left| f'_x(x,y) \right| \cdot \Delta(x) + \max_D \left| f'_y(x,y) \right| \cdot \Delta(y), \qquad (4)$$

где максимум модулей частных производных находят среди всех их значений в области

$$D: \begin{cases} x - \Delta(x) \le x^* \le x + \Delta(x), \\ y - \Delta(y) \le y^* \le y + \Delta(y). \end{cases}$$

Аналогично определяется абсолютная погрешность значения функции трёх и более переменных.

2. Решение нелинейных уравнений

2.1. *Изоляция корней*

Пусть требуется найти корни (решения) уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (5),$$

где $f(x)$ – нелинейная функция.

В общем случае можно говорить лишь о приближенном вычислении корней уравнения (5), т.е. о получении такого значения аргумента, при котором $f(x) \approx 0$. Принято считать, что точное решение x^* этого уравнения *получено с точностью* ε, если для полученного приближенного решения x выполнено условие $\left| x - x^* \right| < \varepsilon$.

Если непрерывная функция $f(x)$ является знакопеременной в области определения, то уравнение (5) имеет конечное или бесконечное количество корней. Каждый из корней получают, используя численные методы, после процедуры отделения корней.

О*тделить корень* уравнения (5) – значит найти такой интервал (a, b), в котором содержится корень уравнения, причем только один.

Известно, что если на концах некоторого промежутка $[a, b]$ непрерывная функция $f(x)$ имеет разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, а внутри этого промежутка производная $f'(x)$ знак не меняет, то в интервале (a, b) существует корень уравнения (5), причем только один.

Процедура отделения корней может быть осуществлена графически (построением графика функции $f(x)$) или с помощью проверки знака функции на некотором множестве значений x, например, на множестве равноотстоящих точек на оси абсцисс.

2.2. *Уточнение корней уравнения методом деления отрезка пополам*

Пусть требуется решить уравнение (5) с заданной точностью ε. Известен промежуток изоляции корня x^* – промежуток $[a, b]$, на концах которого непрерывная функция $f(x)$ имеет разные знаки, а внутри этого промежутка производная $f'(x)$ знак не меняет.

Процедура *уточнения корня* заключается в построении последовательности точек x_0, x_1, x_2, ….. x_k,…., такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$. Процесс вычисления заканчивается, когда получено x_k, удовлетворяющее условию

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon . \tag{6}$$

Опишем метод уточнения корня, называемый *методом деления отрезка пополам, или методом дихотомии*, или *методом бисекции*. Иногда этот метод называют еще *методом проб*.

Уточнение корня методом деления отрезка пополам осуществляется в следующем порядке:

1) вводим обозначении: $a_0 = a$, $b_0 = b$;

2) вычисляем $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$;

3) из двух интервалов (a_0, x_0) и (x_0, b_0) выбираем тот, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала a_1, b_1;

4) вычисляем $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$;

5) из двух интервалов (a_1, x_1) и (x_1, b_1) выбираем тот, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала a_2, b_2;

6) вычисляем $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$,

и так далее, пока не будет выполнено условие $|b_k - a_k| \le 2\varepsilon$, – тогда приближенное значение корня $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ будет удовлетворять условию (6), т.е.

решением уравнения будет число $x^* = x_k \pm \varepsilon$.

Последовательность $\{x_k\}$, полученная методом деления отрезка пополам, сходится к точному решению x^*, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Описание алгоритма метода.

1. Для $k = 0$ выполняем:

$$a_0 = a;\ b_0 = b;\ x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}. \qquad (7)$$

2. Увеличиваем номер шага $k := k + 1$, выполняем вычисления:

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(a_{k-1}) < 0, \\ x_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(a_{k-1}) > 0, \end{cases} \qquad (8.1)$$

$$b_k = \begin{cases} b_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0, \\ x_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) > 0, \end{cases} \qquad (8.2)$$

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}. \qquad (8.3)$$

3. Проверяем условие

$$\left| b_k - a_k \right| \le 2\varepsilon. \qquad (9)$$

Если условие не выполняется, переходим к пункту 2, если условие выполняется, то процесс закончен. Получаем ответ: $x^* \approx \dfrac{b_k + a_k}{2}$.

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1. *Системы линейных алгебраических уравнений*

Пусть требуется найти решение системы из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система может быть записана в матричном виде

A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец неизвестных,

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов,

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы.

Если в системе $m = n$, то матрица A – квадратная.

Методы решения систем линейных уравнений можно разбить на две группы: *точные* (прямые или конечные) и *приближенные* (итерационные или методы последовательного приближения).

К *точным* методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных x_i. Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, метод вычисления по формулам: Крамера и метод Гаусса (рассмотрены в курсе Математика).

К *приближенным* относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. На практике при использовании итерационных методов ограничиваются вычислением конечного числа приближений в зависимости от допустимого уровня погрешности. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации и его модификация — метод Зейделя.

В прикладных задачах довольно часто используются линейные системы, при решении которых можно не заботиться о «вредном» воздействии неустранимых погрешностей на решение, спокойно применяя простейшую схему гауссова исключения. Это системы, для матриц которых выполнено *условие диагонального преобладания*:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ для всех } i = 1,2,3,\ldots,n.$$

3.2. *Решение систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей*

Необходимость решать подобные системы возникает при реализации различных методов решения дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = f_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = f_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = f_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = f_n. \end{cases}$$ – система с трехдиагональной матрицей.

Для решения таких систем применяют ***метод прогонки***.

Алгоритм метода прогонки для систем с трехдиагональными матрицами можно представить в виде реализации двух этапов:

1) *Прямая прогонка*:

Вычисляются прогоночные коэффициенты p_i и q_i по формулам:

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1},\ p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1} a_i},\ i = 2,3,\ldots,n-1, \tag{10.1}$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1},\ q_i = \frac{f_i - q_{i-1} a_i}{b_i - p_{i-1} a_i},\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{10.2}$$

Замечание. Ввиду опасности обращения знаменателя в ноль в этих формулах следует помнить об ***условиях применимости метода прогонки*** – условиях диагонального преобладания в исходной матрице: $|b_i| > |a_i| + |c_i|$ для всех i.

2) *Обратная прогонка*:

Вычисляется искомое решение по формулам:

$$x_n = q_n,\ x_i = q_i - p_i x_{i+1},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \tag{11}$$

3.3. *Метод простой итерации*

Пусть требуется решить систему, заданную матричным уравнением $A\mathbf{x}$

$= \boldsymbol{b}$ с квадратной матрицей A.

Будем считать, что решение системы существует и единственно.

Приведем уравнение

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

к виду, удобному для итерирования

$$\boldsymbol{x} = Cx + f \text{, где} \tag{12}$$

$\underset{n\times n}{C}$ – некоторая матрица; f – вектор-столбец свободных членов.

Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

и, подставив его в правую часть уравнения (4), слева получим следующее приближение:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = Cx^{(0)} + f$$

и, аналогично, каждое последующее приближение

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f, \quad k = 0,1,2,\dots$$

В качестве ***условия сходимости*** процесса к решению системы можно принять условие:

Максимум построчной суммы модулей элементов матрицы С меньше единицы:

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|c_{ij}\right| = q < 1.$$

Условия сходимости выполняются, если в матрице A диагональные элементы преобладают, т. е. $\left|a_{ii}\right| \ge \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$, $i = \overline{1,n}$, и хотя бы для одного i неравенство строгое. Другими словами, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

Критерий остановки итерационного процесса – выполнение условия:

$$\frac{q}{1-q}\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ – заданная точность.} \qquad (13)$$

Для проверки выполнимости критерия остановки процесса следует проверить выполнение условия *для каждой компоненты* вектора (k+1)-го приближения, используя два приближения (последнее и предпоследнее).

Тогда $x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

3.4. *Метод Зейделя*

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Он заключается в том, что при вычислении (k +1)-го приближения неизвестного $x_i^{(k+1)}$ (компонента вектора) при $i>1$ используются уже вычисленные ранее (k +1)-е приближения неизвестных $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$.

Условие сходимости и ***критерий остановки*** итерационного процесса для метода простой итерации можно использовать и для метода Зейделя.

4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и его использование

В основе многих численных методов лежит замена одной функции $f(x)$, которая не может быть использована для решения некоторой задачи, другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$ в некотором смысле и обладающей свойствами, которые позволят производить над нею необходимые вычислительные операции. Такую замену принято называть *аппроксимацией* функции $f(x)$. Разные виды аппроксимации отличаются выбором аппроксимирующей функции $\varphi(x)$, критериями близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и др.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана *сетка* – множество точек $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$, называемых *узлами сетки*. И пусть функция $f(x)$ задана лишь в узловых точках, т.е. известны ее значения $y_i = f(x_i)$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Такие данные удобно представить в виде таблицы:

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$f(x_i)$	y_0	y_1	…	y_n

Кроме того, пусть задана некоторая точка $\bar{x} \in [a, b]$, не совпадающая ни с одной из узловых точек.

Задача интерполяции функции состоит в том, чтобы по имеющейся таблице значений $f(x)$ найти ее значение в точке $\bar{x} \in [a, b]$ с некоторой степенью точности.

Для решения этой задачи строится аппроксимирующая функция $\varphi(x)$, значения которой в узловых точках совпадают с заданными значениями функции: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Геометрически это означает, что графики функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ пересекаются или касаются друг друга не менее, чем в $(n+1)$ заданных точках. Удобной для этой цели функцией $\varphi(x)$ является полином (многочлен) n-го порядка:

$$\varphi(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n.$$

Одной из форм представления интерполяционного полинома является *интерполяционный полином в форме Лагранжа*:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot y_i \right).$$

Интерполяционный полином n-го порядка в форме Лагранжа состоит из $(n+1)$-го слагаемого, каждое из которых является многочленом n-го порядка.

Например, интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа состоит из 5 слагаемых и в развернутом виде выглядит так:

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \cdot y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} y_2 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} y_3 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y_4.$$

Если задать на промежутке $[a, b]$ *равномерную сетку* с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{4}$, т.е. точки $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ тогда формула полинома $L_4(x)$ будет иметь более простой вид:

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)\,h^4} \cdot y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)\,h^4}\,y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{2\cdot1\cdot(-1)(-2)\,h^4}\,y_2+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{3\cdot2\cdot1\cdot(-1)\,h^4}\,y_3+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot h^4}\,y_4. \qquad (14)$$

Чтобы найти приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x}\in[a, b]$, следует воспользоваться формулой $f(\bar{x}) \approx L_4(\bar{x})$. При этом можно не приводить полученный полином в форме Лагранжа к стандартному виду $P_n(x)$, если это не требуется для другой цели, а просто подставить значение $x = \bar{x}$ в формулу (14).

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА РГР № 1

Задача 1. Даны приближенные значения величин $x = 1,6$, $y = 0,35$, где $\Delta(x) = 0,02$, $\delta(y) = 4\%$. Требуется:

1) вычислить значение величины $s=\dfrac{y}{3y-x}$, оценить предельную абсолютную погрешность $\Delta(s)$ и округлить значение s в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции $f(x, y) = \sqrt{x}\cdot(2x - 3y)$, оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Решение.

1). Вычислим приближенное значение s: $s=\dfrac{y}{3y-x}=\dfrac{0,35}{1,05-1,6}\approx -0,6364$.

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (2), в которой

$$\Delta(x) = 0,02;\ \Delta(y) = y\cdot\delta(y) = 0,35\cdot0,04 = 0,014,$$

следовательно, по формуле (1) получаем:

$$\Delta(3y - x) = 3\Delta(y) + \Delta(x) = 0,062.$$

Предельная абсолютная погрешность значения s:

$$\Delta(s)=\Delta\left(\frac{y}{3y-x}\right)=\frac{|y|\cdot\Delta(3y-x)+|3y-x|\cdot\Delta(y)}{(3y-x)^2}=\frac{0{,}35\cdot0{,}062+0{,}55\cdot0{,}014}{(-0{,}55)^2}\approx0{,}1.$$

Округлим значение s, оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата: $\Delta(s)$ = 0,1, следовательно, значение s округляем до одного знака после запятой: $s \approx -0{,}6$.

2). Вычислим приближенное значение функции $f(x, y) = \sqrt{x}\cdot(2x-3y)$:

$$f(1{,}6;\ 0{,}35)=\sqrt{1{,}6}\cdot(3{,}2-1{,}05)\approx1{,}2649\cdot2{,}15\approx2{,}7196.$$

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (4), в которой:

$$f'_x=\frac{2x-3y}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot2=3\sqrt{x}-\frac{3y}{2\sqrt{x}};\quad f'_y=-3\sqrt{x};$$

$$D:\begin{cases}1{,}6-0{,}02\le x^*\le1{,}6+0{,}02,\\0{,}35-0{,}014\le y^*\le0{,}35+0{,}014.\end{cases}$$

Максимальные значения модулей частных производных:

$$\max_D\left|f'_x(x,y)\right|=\max_D(3\sqrt{x})-\min_D(3y)/\max_D(2\sqrt{x})=$$

$$=3\sqrt{1{,}62}-3\cdot0{,}336/(2\sqrt{1{,}62})\approx3{,}4224;$$

$$\max_D\left|f'_y(x,y)\right|=\max_D\left|-3\sqrt{x}\right|=3\sqrt{1{,}62}\approx3{,}8184.$$

Предельная абсолютная погрешность значения функции:

$$\Delta(f)\le\max_D\left|f'_x(x,y)\right|\cdot\Delta(x)+\max_D\left|f'_y(x,y)\right|\cdot\Delta(y)\approx$$

$$\approx3{,}4224\cdot0{,}02+3{,}8184\cdot0{,}014\approx0{,}122\approx0{,}2$$

(округление абсолютной погрешности производится «с избытком»).

Округлим значение функции, оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата: $\Delta(f)$ = 0,2, тогда $f(1{,}6;\ 0{,}35) \approx 2{,}7$.

Ответы: 1) $s \approx -0{,}6$; $\Delta(s) = 0{,}1$;

2) $f(1{,}6;\ 0{,}35) \approx 2{,}7$; $\Delta(f) = 0{,}2$.

<u>Задача 2.</u> Дано уравнение: $x^5 + 3x - 2{,}5 = 0$. Требуется:

1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;
2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ при помощи метода деления отрезка пополам.

<u>Решение.</u>

1). Будем искать такой интервал (a, b), в котором содержится корень уравнения $x^5 + 3x - 2{,}5 = 0$, причем только один. Для этого найдем производную $f'(x) = 5x^4 + 3$. Из того, что $f'(x) > 0$ для любых значений x, следует, что функция $f(x) = x^5 + 3x - 2{,}5$ монотонно возрастающая, значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет только один корень (точку пересечения графика $y = f(x)$ с осью абсцисс).

Подбором находим две точки, в которых функция имеет разные знаки: например, точки $a = 0{,}5$, $b = 1$ (чем ближе друг к другу эти точки, тем меньше потребуется сделать вычислений на этапе уточнения корня). Проверка: $f(0{,}5) = (0{,}5)^5 + 3 \cdot 0{,}5 - 2{,}5 \approx -0{,}9 < 0, \quad f(1) = 1^5 + 3 - 2{,}5 = 1{,}5 > 0$, следовательно, $f(a) \cdot f(b) < 0$ и корень уравнения $x^* \in [0{,}5;\ 1]$.

2). Уточним корень уравнения $x^5 + 3x - 2{,}5 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ методом деления отрезка пополам.

Для этого обозначим: номер шага $k = 0$; $a_0 = a = 0{,}5$; $b_0 = b = 1$, и вычислим начальное значение корня $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 0{,}75$ и значение функции $f(x_0) = x_0^5 + 3x_0 - 2{,}5 \approx -0{,}0127$ (все промежуточные вычисления будем производить, используя 4 десятичных знака после запятой).

Для $k = 1$ находим a_k, b_k. По формулам (8.1) –(8.2). Поскольку $f(x_0) < 0$, то выполнены условия $f(x_0) \cdot f(a_0) > 0$, $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0$, поэтому $a_1 := x_0$ и $b_1 := b_0$, т.е. $[a_1; b_1] = [0{,}75;\ 1]$. После этого вычислим $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0{,}875$, значение функции $f(x_1) \approx 0{,}6379$ и проверим выполнение условия (9): $|b_1 - a_1| \le 2\varepsilon$. Получаем: $|b_1 - a_1| = 0{,}25 > 2\varepsilon = 0{,}02$. Условие не выполнено, следовательно, переходим к следующему шагу.

Для k = 2, 3,…. находим a_k, b_k, x_k по формулам (8.1) – (8.3), проверяя на каждом шагу выполнение условия (9): $|b_k - a_k| \le 2\varepsilon$ и, если оно выполнено, определяем знак $f(x_k)$. Если $f(x_k) < 0$, то на следующем шаге изменяем a_k, а если $f(x_k) > 0$, то изменяем b_k, чтобы на каждом шаге выполнялось условие $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$. Результаты расчетов заносим в таблицу:

k	a_k	b_k	$x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$	$\|b_k - a_k\|$	$f(x_k) = x_k^5 + 3x_k - 2,5$
0	0,5	1	0,75	0,5	– 0,0127 < 0
1	0,75	1	0,875	0,25	0,6379 > 0
2	0,75	0,875	0,8125	0,125	0,2916 > 0
3	0,75	0,8125	0,7813	0,0625	0,1348 > 0
4	0,75	0,7813	0,7656	0,0313	0,0600 > 0
5	0,75	0,7656	0,7578	0,0156	

Процесс вычислений закончен, т.к. $|b_5 - a_5| = 0{,}0156 < 2\varepsilon = 0{,}02$. Последнее значение x_5 округляем в соответствии с заданной точностью ε = 0,01: $x^* \approx x_5 \approx 0{,}76$.

Ответ: $x^* = 0{,}76 \pm 0{,}01$.

<u>Задача 3.</u> Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 25. \\ 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 45 \\ 4x_4 + 5x_5 = 41 \end{cases}$$

Решение

Решение удобнее оформить в таблице:

i	a	b	c	f	p_i	q_i	x_i
1	0	1	1	3	1	3	1
2	1	2	2	11	2	8	2
3	2	3	3	25	-3	-9	3
4	3	4	4	45	4/13	5 7/13	4
5	4	5	0	41	0	5	5

Столбцы заполняются по формулам

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1},\; p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\; i = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1},\; q_i = \frac{f_i - q_{i-1}a_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\; i = 2,3,\ldots,n$$

В последнем столбце находится решение системы, которое находится по формулам

$$x_n = q_n,\; x_i = q_i - p_i x_{i+1},\; i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Ответ: решение системы: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$.

Задача 4. Дана таблица значений функции $f(x)$:

x_i	– 0,5	– 0,2	0,1	0,4	0,7
$f(x_i)$	3,2216	5,3468	4,9472	1,5327	2,5003

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции $f(x)$ интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x} = 0{,}2$.

Решение.

1). Все значения x_i в данной таблице образуют равномерную сетку: $x_i = x_0 + ih$, где $x_0 = -0{,}5$, $h = 0{,}3$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Построим интерполяционный полином Лагранжа 4-го порядка по формуле (14), подставляя в нее значения x_i и $y_i = f(x_i)$:

$$L_4(x) = \frac{(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{(-1)(-2)(-3)(-4)\,0{,}3^4}\cdot 3{,}2216 +$$

$$+\frac{(x+0{,}5)(x-0{,}1)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)\,0{,}3^4}\cdot 5{,}3468 + \frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\,0{,}3^4}\cdot 4{,}9472 +$$

$$+\frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}7)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\,0{,}3^4}\cdot 1{,}5327 + \frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0{,}3^4}\cdot 2{,}5003.$$

Приведем полученный полином к стандартному виду, произведя упрощения:

$L_4(x) \approx 16{,}572(x^4 - x^3 + 0{,}15x^2 + 0{,}05x - 0{,}0056) - 110{,}016\,(x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}21x^2 +$
$+ 0{,}167x - 0{,}014) + 152{,}691(x^4 - 0{,}4x^3 - 0{,}39x^2 + 0{,}086x + 0{,}028) - 31{,}537(x^4 -$
$- 0{,}1x^3 - 0{,}39x^2 - 0{,}031x + 0{,}007) + 12{,}8616\,(x^4 + 0{,}2x^3 - 0{,}21x^2 - 0{,}022x +$
$- \quad + 0{,}004) = 40{,}5716x^4 + 5{,}0888x^3 - 24{,}3618x^2 - 3{,}7180x + 5{,}5535$

(промежуточные вычисления производим, используя 4 десятичных знака после запятой).

2). Вычислим значение $f(\bar{x})$ с округлением до 3-го знака после запятой:

$$f(\bar{x}) = f(0{,}2) \approx L_4(0{,}2) \approx$$

$$\approx 40{,}5716\cdot 0{,}2^4 + 5{,}0888\cdot 0{,}2^3 - 24{,}3618\cdot 0{,}2^2 - 3{,}7180\cdot 0{,}2 + 5{,}5535 \approx 3{,}941.$$

Ответы:

1) интерполяционный полином в стандартном виде:

$$L_4(x) \approx 40{,}5716x^4 + 5{,}0888x^3 - 24{,}3618x^2 - 3{,}7180x + 5{,}5535;$$

1) значение $f(\bar{x}) = f(0{,}2) \approx 3{,}941$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы: учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – М.: Наука,1987 248 с.

2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002.– 840 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов. В 2 ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.– М.: Оникс: Мир и образование, 2005.– 416 с.

4. Воробьева, Г. Н., Данилова, А. Н. Практикум по численным методам / Г. Н. Воробьева, А.Н. Данилова.– М.: Высш. школа, 1979.– 184 с.

5. Мостовская Л.Г. Вычислительная математика: учебно-методическое пособие ч.1 / Л. Г. Мостовская, А.-В.И.Середа, – Мурманск, 2001. – 86 с.